APPENDIX

Jn qua veritas perfectæ Circuli Quadraturæ inventæ novis Demonſtrationibus confirmatur, & Jlluſtratur.

DEFINITIONES. *Fig. I.*

1. *Quadratum Diametri ſeu Circulo circumſcriptum* eſt figura A B C D tangens Peripheriam in 4. punctis æqualiter à ſe diſtantibus, cujus latus eſt æquale Diametro.

Corollarium. Ex hoc quadruplici contactu oriuntur 4. Triangula mixtilinea, quorum quodlibet componitur ex 4ta parte Peripheriæ brn, & ex 2. Semidiametris bA & An. Sunt igitur inter ſe æqualia: quidquid ergo de uno dicitur, etiam de reliquis 3. ejuſdem Circuli eſt intelligendum.

2. *Quadratum Circulo inſcriptum* in genere eſt figura intra Circulum contenta vel tota, ut o p k q, & y x z v, vel quoad maximam partem, ita ut tantum anguli extra eam promineant, ut Quadratum e f g h.

3. *Quadratum Circulo inſcriptum propriè ſic dictum* eſt figura, per cujus angulorum vertices tranſit Peripheria, ſeu cujus latera ſingula ſubtendunt 4tam. partem Peripheriæ.

4. *Segmentum plenum* ſeu *perfectum* eſt figura biangula ex arcu c e r l i & chorda c d a i conſtans

5. *Segmentum mutilum* eſt figura quadrangula ex arcu e r l, ex chorda d a impropriè ſic dicta, & ex lineis transverſis e d & l a compoſita.

Corollarium. Quadratum e f g h ita inſcribitur Circulo, ut tam latera ipſa, quàm eorum extremitates à Peripheria æqualiter diſtent e. gr. latus h e tantum abeſt ab arcu c e r l i, quantum reliqua 3. latera à ſuis arcubus diſtant, & extremitates ejus h & e tantum remotæ ſunt à Peripheria, quantum extremitates reliquorum laterum nempe intervallo linearum e d, l a &c. inter ſe æqualium, quibus à quolibet latere tam ſuperiùs quàm inferiùs demtis remanent 4. chordæ, ut c d ac inter ſe æquales; quare etiam 4. arcus ut c e r l i, quos illæ ſub-

tendunt, ſunt æquales; conſequenter neceſſe eſt, ut ſegmenta perfecta inde orta ſint quoque æqualia, à quibus ſi auferantur 8. parva Triangula c e d, i l a &c. inter ſe æqualia, relinquuntur 4. ſegmenta mutila neceſſariò inter ſe æqualia. Quidquid igitur de uno ſegmento ſeu perfecto, ſeu mutilo dicitur, valet etiam de reliquis 3. ejuſdem circuli.

6. *Figuræ ſimiles* ſunt, in quibus omnia eodem modo determinantur; ſeu quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera quæ æqualibus angulis opponuntur, proportionalia.

Corollarium. Omnia Triangula mixtilinea per Quadrata circulis inæqualibus circumſcripta eodem modo determinantur: ſunt ergo ſimilia, quemadmodum etiam omnia Triangula æquilatera; Quadrata; Circuli; Polygona regularia ejuſdem ſpeciei; Circulorum inæqualium ſegmenta tam perfecta, quam mutila, quorum arcus ſunt ſimiles, h. e. eundem habent numerum graduum; aut quorum chordæ ad radios eandem habent rationem.

7. *Quadrare figuras* eſt invenire earum areas in menſura quadrata.

8. *Quadratura Circuli* eſt inventio areæ ejus in menſura quadrata.

Obſervatio 1ma. Si radio 200. digitorum menſuræ majoris deſcribatur Quadrans, circuli eique circumſcribatur Quadratum, cujus latus eſt radius, ut habeatur Triangulum mixtilineum, deinde ad reperiendum ſegmentum eidem inſcribatur *1mo* latus ſubtendens 4tam partem Peripheriæ; obſervabitur ſegmentum eſſe majus Triangulo mixtilineo. *2do* Applicato huic Quadranti latere in proportione Culeniana nempe 302''; (*) cognoſcetur ſegmentum mutilum eſſe minus Triangulo mixtilineo. *3tio* Si aptetur eidem Quadranti latus 300'' quod conficit $\frac{3}{4}$ Diam. quæ hic eſt 400''; nulla inæqualitas inter ſegmentum mutilum, & Triangulum mixtilineum adverti poteſt. Jn caſu 2do & 3tio producenda ſunt 2. latera Quadrati circumſcripti, ut latus inſcribendum cum iis concurrere, & 2. Triangula extra aream Quadrantis formare queat, quæ deinde à ſegmento perfecto ſubtrahenda ſunt, ut

---

[*] Ex § 9no patet poſita Diametro 200. latus inſcribendum in proportione Culeniana eſſe 151. proinde duplicata Diametro etiam latus inſcribendum duplicari debet. Si amplitudo loci patitur, ut adhibeatur radius 300'' cum lateribus inſcribendis pariter triplicatis; eo verior deprehendetur obſervatio.

ut habeatur mutilum, quod tandem cum Triangulo mixtilineo comparatur.

Notandum est probè, observationem hanc instituendam esse non in charta, sed in pavimento conclavis spatiosi, ubi funiculus 200^{ll} longus, cujus extremitati applicatur creta, fungitur vice radii. Cur autem per hujusmodi repræsentationem inæqualitas inter segmentum mutilum, & Triangulum mixtilineum circuli minoris ex majori illico cognosci possit, ratio in promptu est: Nam Circuli habent hoc cum Quadratis commune, quòd diametro duplicata, triplicata, quadruplicata, quintuplicata &c. segmenta mutila, Triangula mixtilinea, differentia eorum per inscriptionem falsi quadrati orta, & area Circuli ipsa crescant in ratione quadrupla, noncupla, sedecupla, vigecupla 5ta & sic porro. Si igitur radius Quadrantis majoris est ducenties major radio Quadrantis minoris; segmentum mutilum, Triangulum mixtilineum, & differentia illorum per inscriptionem falsi lateris orta evadunt quadragies millies majora in illo, quàm sunt in hoc: idcirco differentia simpla etiam minima in Circulo majori toties aucta necessariò sub aspectum cadere debet. Observationem hanc eò fidelius retuli, quò magis à prædicato Deceptoris abhorreo.

Corollarium 1mum. Si 2. figuræ minores, inter quas nulla inæqualitas adverti potest, repræsententur salva similitudine per majores; ex his statim constabit, quænam minorum sit maior, & quænam minor: dummodo hæc repræsentatio debito fiat modo nempe: ut digiti figurarum minorum è scala geometrica desumti, immo lineæ, si opus fuerit, per digitos mensuræ majoris in figuris majoribus similibus designentur. Hæc est enim similitudinis proprietas admiranda, ut inæqualitas insensibilis figurarum minorum in majoribus similibus evadat palpabilis. Sint e. gr. 2. Quadrata parva: Sit latus 1mi 158^{ll} & secundi $159.^{ll}$ erunt areæ 25281^{ll}, & 24964^{ll}; quarum differentia, nempe 317. digiti minores, non est tanta, ut se in oculos ingerat; sed 317. digiti majores quadrati, qui efficiunt plus quàm 3. pedes quadratos mensuræ majoris, illico in conspectum prodeunt. Quapropter ex figuris majoribus debito modo delineatis inæqualitas minorum necessariò cognosci debet.

Corollarium 2dum. Si autem dici nequeat, quænam ex majoribus figuris similibus debito modo delineatis sit major, & quænam minor; erunt tum illæ, tum minores, quas repræsentant, reverà inter se æquales: nam si minima inter has daretur inæqualitas; ea in figuris majoribus similibus debito modo delineatis præberet se illico, ut patet ex

 Corol-

Corollario præcedenti, notabiliter immo maximè ſpectandam. Hæc illatio, ut fatentur ipſimet RR. PP. Profeſſores Geometriæ, Viri encomiis meis majores, quibuscum hac de re ſermones hìc contuli, eſt tam certa & infallibilis, ut, perpenſis attente perpendendis, nemo niſi affectu mentem habens præpeditam eam inficiari, aut in dubium vocare queat.

Problema de invenienda perfecta Circuli Quadratura.

Reſolutio & Præparatio fit ſicut in § 2do.

Demonſtratio. Fig: 1. Perfecta Quadratura Circuli eſt inventio exacta areæ ejus in menſura quadrata; ſed hæc area exactè reperitur addendo Quadrato circumſcripto A B C D inſcriptum e f g h, cujus latus eſt $\frac{3}{4}$ Diam: & ſummam dividendo per 2. Ergo eo ipſo habetur perfecta Circuli Quadratura.

Area Circuli eſt media Arithmetice proportionalis inter Quadratum circumſcriptum & inſcriptum. Ergo exactè reperitur addendo Quadrato circumſcripto inſcriptum, & ſummam dividendo per 2.

Exceſſus Quadrati circumſcripti ſupra aream Circuli eſt æqualis exceſſui areæ Circuli ſupra Quadratum inſcriptum. Ergo area Circuli eſt media Arithmeticè proportionalis inter Quadratum circumſcriptum & inſcriptum.

Exceſſus Quadrati circumſcripti ſupra aream Circuli nihil aliud eſt niſi 4. Triangula mixtilinea, ut b A n r b, & exceſſus areæ Circuli ſupra Quadratum inſcriptum idem eſt ac 4. ſegmenta mutila d e r l a d (*) ſed hæc ſegmenta mutila ſunt æqualia Triangulis mixtilineis. Ergo exceſſus

---

[*] Area Circuli constat ex Octogono irregulari intra eam incluso $=$ x, & segmentis perfectis $=$ y. Quadratum inscriptum e f g h componitur ex eodem Octogono x, & Triangulis parvis extra aream Circuli sitis $=$ b. Quare subtracto Quadrato inscripto x † b ab Area Circuli x † y, necessario remanere debet y — b, id est segmenta mutila, ut d e r l a d, quæ idcirco nihil aliud sunt, nisi differentia seu excessus areæ Circuli supra Quadratum inscriptum. Sunt itaque Triangula parva à segmentis resecta ut i l a censenda æqualia illis extra aream Circuli sitis, ut e i n: licet enim arcus æquales i n, l i &c. non habeant eundem situm, eorum convexitas & concavitas est tamen tam parvi momenti, ut Triangula ipsa non differant inter se, nisi quantitate inassignabili, id est reverà nulla.

ceſſus Quadrati circumſcripti ſupra aream Circuli eſt æqualis exceſſui areæ Circuli ſupra Quadratum inſcriptum.

Figuræ minores ſunt per Corollarium præcedens inter ſe æquales, ſi inter majores ſimiles debito modo delineatas nulla inæqualitas diſtingvi poteſt; ſed in Circulo radio 200^{ll} menſuræ majoris in pavimento deſcripto inter ſegmenta mutila, & Triangula mixtilinea, ut patet ex n. 3. obſervationis, nulla inæqualitas diſtingvi poteſt. Ergo & hæc ſunt inter ſe æqualia, & ſegmenta mutila cujusvis Circuli ſunt æqualia Triangulis mixtilineis.

Poſtremò, quoniam ex obſervatione 1ma & Corollariis inde deductis liquet, ſegmenta mutila non poſſe fieri æqualia Triangulis mixtilineis, niſi inſcripto Quadrato, cujus latus eſt $\frac{3}{4}$ Diam. evidens eſt, aream Circuli ſeu perfectam Circuli Quadraturam haberi addendo Quadrato Diametri aliud, cujus latus eſt ad Diametrum ut 3. ad 4. & ſummam dividendo per 2.

Hac ratione reperitur area Circuli exactè, non autem per approximationem, quæ ſolùm in iis quantitatibus locum habet, de quibus demonſtrari nequit, differentiam ſeu exceſſum utrobique eſſe æqualem.

Corollarium 1mum. Si ex Diametro & area cognita inveniendum ſit latus Quadrati inſcribendi, vocetur hoc X, Quadratum Diametri a^2, & Area Circuli b. Erit per Corollarium 2dum $a^2 - b = b - x^2$, & $a^2 + x^2 = 2b$; conſequenter $x^2 = 2b - a^2$, ac tandem $x = \sqrt{(2b - a^2)}$. Hac ratione reperitur latus Quadrati inſcribendi verum, data Area Circuli vera, falſum autem, ſi hæc eſt falſa, ut contingit in Proportione Culenii & aliorum, de qua exemplum ſuppeditat § 9nus.

Corollarium 2dum. Quoniam latus juxta n. 1. Obſervationis Quadranti applicatum reddit ſegmentum perfectum majus Triangulo mixtilineo; ſequitur inde Quadratum hujus lateris Circulo inſcriptum eſſe nimis parvum, & ideo non poſſe aſſumi pro tertio proportionali, quia tam Area Circuli, quàm Peripheria per hanc falſam Proportionem inventa peccaret in defectu.

Corollarium 3tium. Cum latus juxta n. 2. Obſervationis Quadranti aptatum reddat ſegmentum mutilum minus Triangulo mixtilineo; evidens eſt Quadratum hujus lateris Circulo inſcriptum eſſe nimis magnum: ideoque aſſumpto eo pro 3tio proportionali, tam aream Circuli quàm Peripheriam per hanc falſam Proportionem inventam peccare in exceſſu, quemadmodum id accidit in Proportione Culenii, & aliorum.

Corollarium 4tum. Dividendo Aream Circuli per 4tam partem Diametri prodit Peripheria, quæ diviſa per Diametrum manifeſtat ratio-

rationem ad hanc, ut demonſtratum fuit in § 4to, nempe ut $3\frac{1}{8}$. ad 1.

Obſervatio 2da. Si radio $3\frac{1}{2}$. Ulnarum deſcribatur Circulus, deprehendetur, Peripheriam non continere præciſe 22. ulnas; ſed deficere adhuc præterpropter 3. digitos; deſcripto autem Circulo, cujus radius eſt $4\frac{1}{2}$. ulnarum, reperietur, Peripheriam continere 28. ulnas, & inſuper fere 3. digitos.

Corollarium. Eſt itaque Peripheria cujusvis Circuli tripla Diametri cum minori quam $\frac{1}{7}$, & majori quam $\frac{1}{9}$ parte ejusdem Diametri.

Theorema, Peripheria eſt Diametri tripla cum $\frac{1}{8}$.

Demonſtratio. Diameter, quæ hic ponitur eſſe 6. Punctorum, concipiatur diviſa per 7, 8, & 9.; erit $\frac{1}{7}$ pars ejuſdem $= \frac{6}{7}^{IIII}$; $\frac{1}{8}$ Diametri $= \frac{6}{8}^{IIII}$; & $\frac{1}{9}$ ejuſdem $= \frac{6}{9}$ Puncti. Cum Peripheria vi Corollarii præcedentis excedat triplum Diametri quantitate minori, quàm $\frac{6}{7}$ puncti, ſeu $\frac{1}{7}$ Diametri, & majori, quàm $\frac{6}{9}^{IIII}$ ſeu $\frac{1}{9}$ ejuſdem; nequit quantitas excedens triplum Diametri eſſe alia quam $\frac{1}{8}$ ejuſdem ſeu $\frac{6}{8}$ Puncti: nam quoniam Puncto diviſo in 7. partes æquales, 6. earum Conſtituunt hanc excedentem quantitatem juſto majorem; diviſo autem eo in 9, 6. earum reddunt eandem juſto minorem; nequit Punctum concipi aliter diviſum quàm in 8. partes, quarum 6. conſtituunt neceſſariò quantitatem juſtam: ſunt enim $\frac{6}{8}^{IIII}$ perpaululum minores, quàm $\frac{6}{7}$, & perpaululum majores, quàm $\frac{6}{9}$ Puncti. Hinc poſita Diametro 6. Punctorum, Peripheria debet eſſe 18. cum $\frac{6}{8}$ Puncti, qua diviſa per eandem Diametrum prodit quotus 3. cum $\frac{6}{48}$ ſeu $\frac{1}{8}$ Puncti, conſequenter ob ſimilitudinem Circulorum eſt quælibet Peripheria Diametri tripla cum $\frac{1}{8}$ parte.

Nulla autem adeſt ratio demonſtrandi, quod, ſumendo pro peripheria triplum Diametri cum $\frac{1}{7}$ tantundem peccetur per exceſſum, quantum ſumendo triplum cum $\frac{1}{9}$, peccatur per defectum, quia $\frac{1}{8}$ Diametri, quæ nihil aliud eſt niſi Diameter diviſa per 8. non eſt media Arithmeticè proportionalis inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$: nam reducendo 2. poſtremas fractiones ad eandem denominationem, prodeunt $\frac{9}{63}$ & $\frac{7}{63}$, quarum ſemiſumma $\frac{8}{63}$ eſt media proportionalis; ſed $\frac{1}{8}$ Diametri, quæ eſt $= \frac{8}{64}$, eſt paululum minor quàm $\frac{8}{63}$. Ergo &c.

Methodus

Methodus inveniendi practicè aream segmenti mutili ad confirmandam veritatem observationis 1mæ & Corollariorum inde deductorum.

1. CHorda segmenti mutili Quadrantis majoris radio 200'' in pavimento Conclavis descripti, quæ hic designatur per chordam d a Fig: 1. dividatur bifariam in x.

2. Ex punctis d & x erigantur perpendiculares usque ad arcum e r

3. Jntervallum 8. digitorum transferatur quaterdecies ex d in dimidiam chordam, & ex punctis divisionum erigantur perpendiculares ad arcum pertingentes.

4. Ad singulas perpendiculares consequentes ex punctis concursus præcedentium cum arcu e r, demittantur aliæ, quæ erunt partibus dimidiæ chordæ æquales & parallelæ.

5. Mensuretur quælibet perpendicularis, subtrahaturque 1ma à 2da, 2da à 3tia, hæc à quarta, & ita porro, sic prodibunt differentiæ indicantes altitudines Triangulorum 15. quorum bases sunt æquales basibus totidem Rectangulorum.

6. Quoniam quælibet basis harum figurarum per constructionem est 8. digitorum, præter ultimam, quæ est seorsim mensuranda; facile reperientur earum areæ, quæ cum Triangulo 1mo, orto ex linea d e, & 1ma perpendiculari dabunt dimidium segmentum mutilum, quod duplicatum prodet totum.

Quæratur eadem Area segmenti Geometricè, quod fit ita: à Quadrato Diametri 160000. subtrahatur Quadratum inscriptum 90000. residuum 70000. manifestat segmenta mutila cum Triangulis mixtilineis junctim sumptis, quibus divisis per 2. prodeunt segmenta mutila sola = 35000. quorum 4ta pars 8750.'' dat unum segmentum, quod cùm quàm proxime conveniat cum priore practicè invento, evidens est segmenta mutila per inscriptionem Quadrati, cujus latus est $\frac{3}{4}$ Diametri, manere semper æqualia Triangulis mixtilineis quomodocunque Circulus crescat. Aliter res se habet in proportione Culeniana, ubi latus Quadrati inscripti est 302.'' consequenter Quadratum ipsum 91204.; quo subducto à Quadrato Diametri 160000. remanent pro Triangulis mixtilineis, & segmentis mutilis junctim sumtis 68796. quæ divisa per 2. indicant segmenta sola = 34398. quorum 4ta pars $8599\frac{1}{2}$ dat segmentum unum, quod tamen practicè inventum facit solùm 8299'' præterpropter. Ex quo manifestum

nifeſtum eſt, ſegmenta per inſcriptionem falſi Quadrati in proportione Culenii, aliorumque eò minora fieri Triangulis mixtilineis, quo major in Circulo deſcribendo adhibetur radius.

Monitum in § 8vo. radix extrahenda eſt ſolùm vicies quinquies, quia ſinus 36. graduum jam inventus non eſt quærendus 2do. Deinde § 3tio utpote nihil concludenti ſubſtitui poteſt experimentum ſequens:

1. Curetur tornari globus ſphæricitatis quantum poteſt fieri perfectæ, cujus Diameter ſit ad minimum 18. digitorum.

2. Jnveſtigetur ejus ſoliditas in digitis cùm per proportionem veram tum per Culenianam.

3. Ex eadem ſpecie ligni, ex qua factus eſt globus, curetur etiam confici pollex cubicus perfectus, & quantum ponderet, ad juſtam bilancem examinetur exacte.

4. Per pondus hujus digiti cubici inventum multiplicetur globi ſoliditas utraque.

5. Ope ejuſdem bilancis exploretur quoque accuratè pondus globi lignei: ita rite factis faciendis obſervabitur pondus hoc reſpondere facto ex pondere pollicis cubici in ſoliditatem globi inventam per proportionem veram; non autem Culenianam, conſequenter hanc eſſe falſam, illam verò perfectam e. gr. Sit Diameter 18^{II} reperietur ſoliditas globi per proportionem veram $3037\frac{1}{2}$; per Culenianam $3052.\frac{2}{2}$, digitorum. Pondus pollicis cubici ex ligno tiliaceo eſt $\frac{9}{18}$ Semunciæ, quæ multiplicatæ per ſoliditatem priorem producunt $1708.\frac{13}{32}$ Semuncias; ductæ autem in ſoliditatem poſteriorem dant $1716.\frac{119}{200}$ Semuncias. Examinando deinde pondus globi deprehendetur illud convenire cum producto 1mo; nequaquam autem cum 2do. Ponderato globo ſimul cum pollice cubico, atque hoc à bilance remoto, innoteſcet pondus globi ſolius, quod ablatum à pondere utriuſque indicabit accuratè gravitatem pollicis cubici.